Corrigé des T.D N° 4 de P101

Exercice 1

$n = 144$, $M = 4712$, $\sigma_p = 6000$

Soit la v.a. $\overline{X}$ la moyenne d'échantillonnage.

Comme $n > 30$, on a alors :

$$\overline{X} \to N\left(M, \frac{\sigma_p^2}{n}\right)$$

D'où :

$$\overline{X} \to N\left(4712, \frac{(6000)^2}{144}\right)$$

avec

$$E(\overline{X}) = 4712, \qquad V(\overline{X}) = \frac{(6000)^2}{144} = 250000$$

Il s'agit de déterminer $P(5692 \leq \overline{X} \leq 6000)$.

On pose :

$$T = \frac{\overline{X} - 4712}{500} \to N(0,1)$$

$$P(5692 \leq \overline{X} \leq 6000) = P(1{,}96 \leq T \leq 2{,}57) = F(2{,}57) - F(1{,}96) = 0{,}02$$

Donc :

$$P(5692 \leq \overline{X} \leq 6000) = 0{,}02$$

Exercice 2

$n = 100$, $m = 195{,}4$, $\sigma_e = 45{,}6$

1. $n > 30$

Au risque α donné, on a :

$$I.C(M) = \left[m - t_\alpha.\frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}}, m + t_\alpha.\frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}}\right]$$

A.N :

a. Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$I.C(M) = [186{,}41\,, 204{,}38]$$

b. Au risque $\alpha = 1\%$, $t_\alpha = 2{,}6$

$$I.C(M) = [183{,}48\,, 207{,}31]$$

2. Au risque α donné, on a :

$$n = \left(\frac{t_\alpha.\sigma_e}{h}\right)^2 + 1$$

avec $h = 1$

A.N : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$n = 7989{,}06 \approx 7990$$

Il n'est pas possible d'envisager un échantillon de cette taille.

Exercice 3

$n = 256$, $m = 40{,}6$, $\sigma_e^2 = 64$

1. $n > 30$

Au risque α donné, on a :

$$I.C(M) = \left[m - t_\alpha.\frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}}, m + t_\alpha.\frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}}\right]$$

A.N : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$I.C(M) = [39{,}62\,, 41{,}58]$$

2. Il y a en moyenne 190 $(200.0{,}95)$ intervalles contenant M.

3. Au risque α donné, on a :

$$n = \left(\frac{t_\alpha.\sigma_e}{h}\right)^2 + 1$$

A.N : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$ et $h = 0{,}01$ $\quad n = 2458625$

Exercice 4

Population normale : $M = 20$

Echantillon de patients atteints d'une déficience en vitamine K :

$$n = 40\ , \qquad m' = 18{,}5\ , \qquad \sigma'_e = 4$$

1. $n = 40 > 30$

   Au risque α donné, on a :

$$I.C(M') = \left[m' - t_\alpha.\frac{\sigma'_e}{\sqrt{n-1}}, m' + t_\alpha.\frac{\sigma'_e}{\sqrt{n-1}}\right]$$

   A.N : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$I.C(M') = [17{,}24\ , 19{,}75]$$

2. $M \notin I.C(M') = [17{,}24\ , 19{,}75]$: les patients atteints d'une déficience en vitamine K ont un taux de prothrombine plus faible.

Exercice 5

Population : $p = 0{,}25$

Echantillon : $n = 300$

Soit la v.a. Y la proportion d'échantillonnage.

Comme $n.p = 75 > 5$, on a alors :

$$Y \to N\left(p, \frac{p.q}{n}\right)$$

avec

$$E(Y) = p\ , \qquad V(Y) = \frac{p.q}{n}\ , \qquad q = 1 - p$$

Au risque α donné, on a :

$$\boldsymbol{IP(Y) = \left[p - t_\alpha\sqrt{\frac{p.q}{n}}, p + t_\alpha\sqrt{\frac{p.q}{n}}\right]}$$

A.N : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$0{,}201 \le Y \le 0{,}299$$

Exercice 6

Population : $p = 0{,}6$

Echantillon : $n = 100$

Soit la v.a. Y la proportion d'échantillonnage.

Il s'agit de déterminer $\alpha = P(Y \notin [0{,}5\ ,\ 0{,}7])$.

Comme $n.p = 60 > 5$ on a alors :

$$Y \to N\left(p, \frac{p.q}{n}\right)$$

avec

$$E(Y) = p = 0{,}6\ , \qquad V(Y) = \frac{p.q}{n} = 0{,}024\ , \qquad q = 1 - p = 0{,}4$$

On peut écrire :

$$1 - \alpha = P(0{,}5 \le Y \le 0{,}7)$$

On pose :

$$T = \frac{Y - 0{,}6}{\sqrt{0{,}024}} = \frac{Y - 0{,}6}{0{,}049} \to N(0\ ,1)$$

$1 - \alpha = P(0{,}5 \le Y \le 0{,}7) = P(-2{,}04 \le T \le 2{,}04) = F(2{,}04) - F(-2{,}04) = 2.F(2{,}04) - 1 = 2.0{,}979 - 1 = 0{,}958$

D'où :

$$\alpha = 0{,}042$$

Exercice 7

Echantillon : $n = 170\ , k = 34\ ,\ f = \frac{34}{170} = 0{,}2$

1. Au risque α donné, on a :

$$I.C(p) = \left[f - t_\alpha\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}, f + t_\alpha\sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\right]$$

A.N : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$I.C(p) = [0{,}14\,, 0{,}26]$$

Condition d'utilisation : $n.0{,}14 = 23{,}8 > 5$.

2. Il y a en moyenne 190 $(200.0{,}95)$ intervalles de confiance contenant p.

<u>Exercice 8</u>

Population : $p = 0{,}85$

On désigne par Y la v.a « Proportion de guérison dans l'échantillon ».

Le médecin veut avoir :

$$Y = p \pm 0{,}01$$

On sait que, pour un risque α donné :

$$Y = p \pm t_\alpha \sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}}$$

Donc :

$$t_\alpha \sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{t_\alpha^2.p.(1-p)}{(0{,}01)^2}$$

A.N. : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$n = 4898{,}04 \approx 4899$$

Remarque : Ce résultat est valide puisque la condition d'utilisation est vérifiée ($n.p = 4164{,}15 > 5$).

<u>Exercice 9</u>

Echantillon : $n = 100$, $k = 60$, $f = \frac{60}{100} = 0{,}6$

Au risque α donné, on a :

$$I.C(p) = \left[f - t_\alpha \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\,, f + t_\alpha \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\right]$$

A.N : Au risque $\alpha = 5\%$, $t_\alpha = 1{,}96$

$$I.C(p) = [0{,}50\,, 0{,}69]$$

Condition d'utilisation : $n.0{,}50 = 50 > 5$.

<u>Exercice 10</u>

Echantillon : $f = 0{,}8$

Au risque $\alpha = 5\%$, on a :

$$I.C(p) = [0{,}73\,, 0{,}87]$$

On a :

$$I.C(p) = \left[f - 1{,}96 \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\,, f + 1{,}96 \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f - 1{,}96 \sqrt{\dfrac{f.(1-f)}{n}} = 0{,}73 \\ f + 1{,}96 \sqrt{\dfrac{f.(1-f)}{n}} = 0{,}87 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2.1{,}96 \sqrt{\frac{f.(1-f)}{n}} = 0{,}87 - 0{,}73 = 0{,}14$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{(1{,}96)^2.f.(1-f)}{(0{,}07)^2} = 125{,}44$$

$$\Rightarrow \quad n \approx 126$$

Il y avait 126 consultants examinés pendant cette période. Ce résultat est valide car la condition d'utilisation de l'intervalle de confiance est vérifiée ($n.0{,}73 = 91{,}98 > 5$).